

**Peta Kendali Multivariat dengan Dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT)  
pada Data *Outlier***  
(Studi Kasus: Air Hasil Produksi Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Kota Samarinda)

***Multivariate Control Chart with Mason, Young and Tracy (MYT) Decomposition  
on Outlier Data***  
(Case Study: Water was Produced by Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Kota Samarinda)

Siti Mahmuda<sup>1</sup>, Rito Goejantoro<sup>2</sup>, Darnah Andi Nohe<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program Studi Statistika FMIPA Universitas Mulawarman

<sup>2,3</sup>Dosen Program Studi Statistika FMIPA Universitas Mulawarman

Email: sitimahmuda24@gmail.com<sup>1</sup>, ritogoejantoro@yahoo.com<sup>2</sup>, darnah.98@gmail.com<sup>3</sup>

**Abstract**

*Multivariate control chart is used to look collective variables on a process. The purpose of multivariate control chart is to know is a process on control or not . A process is said on control if not any observation out off control (outlier). This study used multivariate control chart is  $T^2$  Hotelling control chart with Mason, Young and Tracy (MYT) decomposition to know variable causes a process out off control statistic. The purpose of this study was to know is water was produced by Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Samarinda City on control or not. If water was produced by Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Samarinda City is not on control so will be detected the variable causes the water out off control. Summary of this study was use  $T^2$  Hotelling control chart was known that water was produced by Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Samarinda City is not on control. Used Mason, Young and Tracy (MYT) decomposition is known that variable pH of water causes the water out off control.*

*Key words:  $T^2$  Hotelling control chart, Mason, Young and Tracy (MYT) decomposition, water was produced by PDAM.*

**Pendahuluan**

Dalam berbagai analisis statistik tidak jarang ditemukan berbagai kasus yang terdiri dari beberapa variabel. Hal ini dikarenakan dalam suatu kasus faktor yang berpengaruh biasanya tidak hanya terdiri dari satu faktor, melainkan beberapa faktor. Secara umum, analisis multivariat atau metode multivariat berhubungan dengan metode-metode statistik yang secara bersama-sama (simultan) melakukan analisis terhadap lebih dari dua variabel pada setiap objek atau orang.

Pengendalian mutu multivariat dilakukan dengan cara membuat suatu peta kendali multivariat. Terdapat beberapa jenis peta kendali multivariat antara lain peta kendali  $T^2$  Hotelling, MEWMA (*Multivariate Exponentially-Weighted Moving Average*) dan MCUSUM (*Multivariate Cumulative Sum*). Peta kendali  $T^2$  Hotelling merupakan peta kendali multivariat yang dapat mendeteksi adanya *outlier* dan pergeseran rata-rata, dimana pada peta kendali  $T^2$  Hotelling terdapat suatu dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT) yang mampu menunjukkan variabel yang menyebabkan suatu proses tidak terkendali. Hal-hal tersebut yang mendasari penelitian ini menggunakan peta kendali Hotelling  $T^2$ .

Dekomposisi  $T^2$  Hotelling atau dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT) diperkenalkan oleh Mason, Tracy dan Young (1995). Metode ini

tidak memperhatikan urutan antar variabel. Pada metode ini pengamatan yang berada di luar kendali yang didapatkan dari fase II selanjutnya diperiksa. Metode ini mampu menjelaskan variabel apa saja yang menyebabkan suatu proses tidak terkendali. Hal-hal yang telah diuraikan di atas menjadi alasan dilakukannya penelitian menggunakan peta kendali multivariat  $T^2$  Hotelling dalam pengendalian mutu statistik multivariat.

Dalam penelitian ini, penulis ingin melakukan pengujian parameter fisika dan kimia air yang diproduksi oleh Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Kota Samarinda. Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui apakah parameter fisika dan kimia air tersebut masih dalam keadaan terkendali atau tidak.

**Peta Kendali Multivariat**

**Alat Dasar untuk Statistik Multivariat**

Rata-rata sampel dapat dihitung dari pengukuran sebanyak  $n$  pada masing-masing variabel  $p$ , sehingga secara umum akan ada  $p$  sampel berarti (Johnson & Wichern, 2007):

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}, j = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

Notasi  $s^2$  sudah sering digunakan untuk mengindikasikan variansi sampel. Notasi  $s_{ij}$  digunakan untuk menotasikan perhitungan

variansi yang sama dari pengamatan pada variabel ke- $j$ , dengan rumus sebagai berikut :

$$s_j^2 = s_{jj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

Akar dari variansi sampel diketahui sebagai standar deviasi sampel (Johnson & Wichern, 2007).

Variansi dari dua variabel yang berbeda dirumuskan sebagai berikut (Johnson & Wichern, 2007):

$$s_{jk}^2 = s_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) \quad (3)$$

dimana  $j = 1, 2, \dots, p, k = 1, 2, \dots, p, j \neq k$  dan  $s_{jk} = s_{kj}$ .

**Distribusi Normal**

Sampel acak  $X$  mengikuti distribusi normal,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  jika fungsi densitas dari  $X$  adalah (Herryanto & Gantini, 2009) :

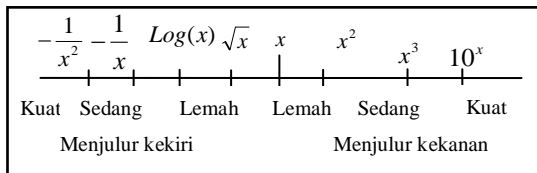
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (4)$$

dan fungsi pembangkit momennya adalah

$$M(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \quad (5)$$

**Transformasi Data**

Agar asumsi bahwa data berdistribusi normal tetap dipenuhi maka perlu dilakukan suatu transformasi terhadap data asli. Untuk memilih fungsi transformasi yang tepat dapat digunakan tangga transformasi Tukey yang digambarkan sebagai berikut (Howell, 2007) :



Gambar 1. Tangga Transformasi Tukey

Tangga transformasi dapat dijelaskan sebagai berikut : transformasi  $10^x$  akan membuat bentuk distribusi data menjadi menjulang kekanan secara kuat, sedangkan transformasi  $-\frac{1}{x^2}$  akan membuat bentuk distribusi data menjadi menjulang ke kiri secara kuat.

**Peta Kendali T<sup>2</sup> Hotelling**

Statistik T<sup>2</sup> Hotelling untuk pembuatan peta kendali proses yang melibatkan  $p$  buah variabel adalah (Yuneidi, Rahmi & Yozza, 2012) :

$$T_i^2 = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \quad (6)$$

dengan  $T_i^2$  merupakan nilai statistik T<sup>2</sup> Hotelling pada sampel (pengamatan) ke- $i$ .

Sebelum membuat peta kendali T<sup>2</sup> Hotelling, dilakukan dulu uji korelasi antar variabel pada seluruh pengamatan. Setelah asumsi bahwa

seluruh data berkorelasi, maka pembuatan peta kendali T<sup>2</sup> Hotelling dapat dilanjutkan. Untuk membuat peta kendali ini data dibagi menjadi dua bagian yaitu data pertama digunakan untuk fase I yang merupakan fase persiapan dan selebihnya digunakan untuk fase II yang berguna untuk memvalidasi peta kendali sehingga digunakan sebagai peta pengendalian proses masa yang akan datang. Langkah-langkah yang dapat dilakukan dalam pembuatan peta kendali T<sup>2</sup> Hotelling adalah sebagai berikut (Mason, Chou, & Young, 2001):

**Fase I**

Langkah awal dalam fase I yaitu sampel dianalisis untuk menentukan apakah proses berada dalam keadaan terkendali atau tidak. Jika proses berada di luar kendali maka pengamatan yang berada di luar batas kendali (*outlier*) harus dibuang atau dikeluarkan. Jika proses sudah terkendali, maka parameter yang diestimasi, yaitu  $\bar{\mathbf{X}}$  dan  $\mathbf{S}$  dapat digunakan pada fase II untuk memantau proses. Adapun UCL dan LCL yang digunakan yaitu (Mason, Chou, & Young, 2001):

$$UCL = \frac{(n-1)^2}{n} \text{Beta}_{(\alpha, p/2; (n-p-1)/2)} \quad (7)$$

$$LCL = 0 \quad (8)$$

**Fase II**

Pada fase II, peta kendali dibuat untuk memeriksa apakah parameter yang diestimasi pada fase I sudah tepat, yaitu dengan cara memantau apakah ada pergeseran *mean* jika menggunakan pengamatan yang baru. Jadi pada fase II, dilakukan perhitungan T<sup>2</sup> berdasarkan vektor-vektor pengamatan  $\mathbf{X}$  yang baru dengan menggunakan matriks kovariansi dan vektor *mean* yang telah diestimasi pada fase I.

Dengan menggunakan sampel berukuran  $n$  dengan  $p$  variabel yang berasal dari sampel historis, maka batas kendali atas (UCL) untuk T<sup>2</sup> pada fase ini adalah (Mason, Chou, & Young, 2001):

$$UCL = \frac{p(n-1)(n+1)}{n(n-p)} F_{(p, n-p; \alpha)} \quad (9)$$

$$LCL = 0 \quad (10)$$

**Dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT)**

Metode Dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT) yaitu suatu metode yang digunakan untuk mengidentifikasi variabel (peubah) mana yang dapat menyebabkan proses berada di luar batas pengendali. Bentuk statistik T<sup>2</sup> untuk sampel ke- $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah (Gonzalez, Mario & Pilar, 2003):

$$T_i^2 = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \quad (11)$$

dengan

$\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$  adalah vektor sampel untuk sampel di masing-masing variabel

$\bar{x}$  adalah vektor *mean* sampel yang ditentukan dari sampel historis.

$S$  adalah matriks kovariansi yang ditentukan dari sampel historis.

**Suku Tidak Bersyarat**

Suku tidak bersyarat ini menunjukkan kontribusi yang diberikan oleh satu variabel terhadap nilai  $T^2$  dengan mengabaikan kehadiran variabel yang lainnya. Suku pertama  $T_j^2$  adalah statistik  $T^2$  yang memberikan informasi tentang kontribusi tidak bersyarat untuk satu variabel saja,  $x_j$  yang merupakan kuadrat statistik  $t$  univariat, yaitu (Mason, Chou & Young, 2001):

$$T_j^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_j)^2}{s_j^2} \tag{12}$$

dengan

$x_j$  adalah variabel ke- $j$

$\bar{x}_j$  adalah *mean* sampel pada variabel ke- $j$

$s_j^2$  adalah variansi sampel untuk variabel ke- $j$ .

*Outlier* akan terjadi jika  $x_1$  terlalu jauh dari *mean* sampel (nilai  $T_1^2$  besar). Dengan menggunakan sampel berukuran  $n$  yang ditentukan dari sampel historis maka batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*) untuk tiap suku ini adalah :

$$UCL = \frac{(n+1)}{n} F_{(\alpha;1,n-1)} \tag{13}$$

Sedangkan batas pengendali bawah (*Lower Control Limit/LCL*) untuk tiap suku pada suku tidak bersyarat adalah :

$$LCL = 0 \tag{14}$$

Selanjutnya adalah langkah pengujian untuk mengetahui apakah variabel ke- $j$  merupakan penyebab proses tidak dalam keadaan terkendali (Gonzalez, Mario & Pilar, 2003).

**Suku Bersyarat**

Suku bersyarat adalah suku pada  $T^2$  yang diuraikan, yang dapat menunjukkan dua variabel atau lebih yang secara bersama-sama menyebabkan proses dalam keadaan tidak terkendali. Secara umum, ingin dilihat kontribusi bersyarat antara variabel ke- $j$ ,  $x_j$  apabila diberikan variabel yang lainnya,  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$  maka suku bersyarat ini dinyatakan dengan  $T_{j,1,2,\dots,(j-1)}^2$  yang ditulis dengan (Gonzalez, Mario & Pilar, 2003):

$$T_{j,k}^2 = T_{j,1,2,\dots,j-1}^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1})^2}{s_{j,1,2,\dots,j-1}^2} \tag{15}$$

dengan

$x_j$  adalah variabel ke- $j$

$\bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1}$  adalah nilai prediksi dari  $x_j$  diberikan  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$  yang diperoleh dari hasil regresi linier.

Dengan menggunakan sampel berukuran  $n$  yang ditentukan dari sampel historis maka batas kendali atas untuk  $T_{j,1,2,\dots,j-1}^2$  adalah

$$\left( \frac{(n+1)(n+1)}{n(n-k-1)} \right) F_{(\alpha;1,n-k-1)} \tag{16}$$

dengan  $k = (j-1)$  = jumlah variabel bersyarat. Sedangkan batas pengendali bawah (*Lower Control Limit/LCL*) untuk tiap suku pada suku bersyarat adalah (Mason, Chou & Young, 2001)

$$LCL = 0. \tag{17}$$

**Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Kota Samarinda**

Perusahaan Daerah Air Minum Kota Samarinda merupakan Badan Usaha milik daerah kota Samarinda yang telah berdiri sejak zaman penjajahan Belanda yaitu pada tahun 1932. Pada tahun 1932 Belanda juga membangun satu sistem penjernihan air minum dan satu intake dengan kapasitas 10 l/det. Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) di Samarinda terdiri atas 8 Instalansi Pengolahan Air (IPA).

**Parameter Fisika Dan Kimia Air Hasil Produksi PDAM**

**Kekeruhan Air**

Kekeruhan air disebabkan oleh ketidaklarutan beberapa jenis mineral atau adanya bahan pencemaran atau plankton serta adanya koloid. Kekeruhan air diukur dengan *nephelometric turbidity* (NTU).

**pH Air**

Kadar pH suatu larutan mencerminkan aktivitas kation hidrogennya dan dinyatakan sebagai logaritma negatif dari aktifitas kation hidrogen dalam mole per liter pada suhu tertentu. Istilah pH lazimnya digunakan untuk menyatakan intensitas kondisi asam atau alkalin suatu larutan.

**Koagulasi dan Koagulan**

Alum sulfat dan feri sulfat telah lama digunakan sebagai koagulan untuk menghilangkan warna pada air yang disebabkan oleh zat organik. Zat organik terdapat pada hampir semua air permukaan dan air tanah. Yu *et al* (2007) menemukan bahwa pengendalian pH pada proses koagulasi yang menggunakan koagulan logam, merupakan faktor penting dalam penyisihan zat organik pada air dengan alkalinitas yang tinggi.

**Metode Penelitian**

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data parameter fisika dan kimia air hasil

produksi Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Kota Samarinda pada tahun 2009 sampai 2013. Variabel dalam penelitian ini adalah kekeruhan air baku ( $X_1$ ), dosis koagulan ( $X_2$ ), pH air ( $X_3$ ) dan kekeruhan air produksi ( $X_4$ )

Adapun teknik analisis data dalam penelitian ini adalah:

1. Uji Kenormalan

Uji kenormalan dilakukan terhadap variabel-variabel karena data multivariat yang akan dibuat peta kendali  $T^2$  Hotelling-nya diasumsikan berdistribusi normal.

2. Membuat Peta Kendali  $T^2$  Hotelling Fase I

Pada fase I pembuatan peta kendali  $T^2$  Hotelling menggunakan data historis yaitu data yang sudah tersedia dan dikumpulkan sebelumnya. Kemudian dianalisis proses berada dalam keadaan terkendali atau tidak.

Fase II

Jika peta kendali  $T^2$  Hotelling pada fase I proses sudah berada dalam keadaan terkendali, dilakukan fase II dengan menggunakan data baru. Nilai  $\bar{X}$  dan  $S$  yang didapatkan pada fase I selanjutnya digunakan untuk menguji pengukuran baru pada fase II.

3. Dekomposisi Mason, Young dan Tracy(MYT)

Setelah diketahui bahwa terdapat pengukuran yang berada di atas batas kendali, maka variabel yang menyebabkan pengukuran tersebut berada di luar batas pengendalian akan dideteksi yaitu dengan menggunakan metode dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT).

Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan data parameter fisika dan kimia air hasil produksi Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Kota Samarinda pada tahun 2009 sampai 2013, dilakukan analisis menggunakan Peta Kendali Multivariat  $T^2$  Hotelling dengan dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT).

Analisis Statistika Deskriptif

Data dianalisis dengan statistika deskriptif yang bertujuan untuk menggambarkan atau mendeskripsikan data dari masing-masing variabel menjadi informasi yang berguna untuk interpretasi secara deskriptif.

Tabel 1. Deskriptif Data Parameter Fisika dan Kimia Air Hasil Produksi PDAM Kota Samarinda

Variabel	N	Mean	Standar Deviasi	Skewness	Kurtosis
$X_1$	42	81,88	29,25	0,42	-0,52
$X_2$	42	42,01	6,44	-0,96	5,50
$X_3$	42	7,59	0,28	0,04	-0,81
$X_4$	42	6,88	4,30	1,42	1,51

Pada Tabel 1 dapat diketahui nilai rata-rata (*mean*), standar deviasi, nilai *skewness* dan nilai kurtosis variabel Kekeruhan Air Baku ( $X_1$ ), Dosis Koagulan ( $X_2$ ), pH Air ( $X_3$ ) dan Kekeruhan Air Produksi ( $X_4$ ).

Uji Kenormalan

Untuk membuat peta kendali multivariat  $T^2$  Hotelling diasumsikan semua variabel harus berdistribusi normal. Maka harus diuji kenormalan variabel yang ada. Uji kenormalan dilakukan dengan Uji Kolmogorov-Smirnov menggunakan data historis/data lama. Adapun hasil Uji Kenormalan Kolmogorov-Smirnov ditunjukkan pada Tabel 2.

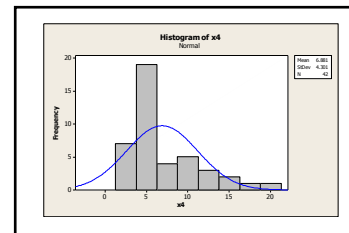
Tabel 2. Tabel Output Uji Kolmogorov-Smirnov

Variabel	Kolmogorov-Smirnov		
	Statistik	Derajat Bebas	P-Value
$X_1$	0,117	42	0,150
$X_2$	0,125	42	0,095
$X_3$	0,132	42	0,067
$X_4$	0,264	42	0,010

Berdasarkan Tabel 2 diketahui bahwa variabel kekeruhan air produksi tidak berdistribusi normal. Oleh karena itu perlu dilakukan transformasi data pada variabel kekeruhan air produksi.

Tranformasi Data

Karena data variabel Kekeruhan Air Produksi ( $X_4$ ) tidak mengikuti distribusi normal, maka perlu dilakukan transformasi data.



Gambar 2. Histogram Data Variabel Kekeruhan Air Produksi ( $X_4$ )

Berdasarkan Gambar 2 dapat dikatakan bahwa grafik menjulur kekanan secara sedang. Sehingga transformasi yang sesuai untuk data variabel Kekeruhan Air Produksi ( $X_4$ ) adalah  $-1/X_4$  yang akan membuat bentuk distribusi data menjadi menjulur ke kiri secara sedang.

Peta Kendali  $T^2$  Hotelling

Fase I

Pada fase I pemantauan dilakukan menggunakan data historis dengan  $n = 42$ . Berdasarkan persamaan (6) didapatkan nilai  $T^2$  untuk tiap pengukuran dan berdasarkan persamaan (7) dengan banyaknya variabel  $= p = 4$  diperoleh nilai *Beta* sebesar 0,3416 maka batas

kendali atas (*UCL*) dengan  $\alpha=0,05$  pada fase I adalah :

$$UCL = \frac{(n-1)^2}{n} \text{Beta}_{(\alpha; p/2; (n-p)/2)}$$

$$UCL = 13,67$$

Sedangkan batas kendali bawah (*LCL*) berdasarkan persamaan (8) pada fase I yaitu :

$$LCL = 0$$

Pada fase ini diperoleh nilai *mean* sampel dan matriks variansi kovariansi dengan menggunakan data historis pada sebagai berikut:

*Mean* sampel menggunakan persamaan (1) yaitu :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 81,88 \\ 42,02 \\ 7,59 \\ -0,20 \end{pmatrix}$$

Matriks Variansi Kovariansi menggunakan persamaan (2) dan (3), yaitu :

Dengan menggunakan persamaan (2) dan *mean*

$$S = \begin{pmatrix} 855,75 & -16,79 & -0,28 & -2,63 \\ -16,79 & 41,49 & -1,23 & 0,06 \\ -0,28 & -1,23 & 0,08 & 0,00 \\ -2,63 & 0,06 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

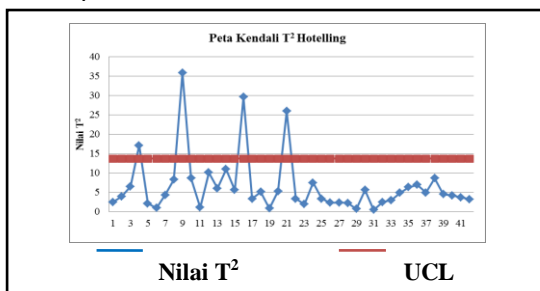
Suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai  $T^2$  berada diatas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai  $T^2$  pada fase I diperoleh dari persamaan (6) dengan menggunakan data historis yang hasil perhitungannya sebagai berikut :

Untuk pengamatan (sampel) ke-1

$$T_1^2 = (X_i - \bar{X})' S^{-1} (X_i - \bar{X})$$

$$T_1^2 = 2,4915$$

dengan cara yang sama diperoleh nilai  $T_2^2, T_3^2, \dots, T_{42}^2$ .



Gambar 3. Peta Kendali  $T^2$  Hotelling Fase I

Pada Gambar 3 menunjukkan peta kendali  $T^2$  fase I, dari gambar tersebut ternyata terdapat pengamatan yang berada di atas batas kendali (*Upper Control Limit/UCL* = 13,67), hal ini berarti proses belum dalam keadaan terkendali. Dalam penelitian ini pengamatan ke-9 memiliki nilai  $T^2$  paling besar atau jauh dari batas kendali atas (*Upper Control Limit/UCL*) yaitu sebesar 35,7954.

### Pengulangan I Fase I

Pada pengulangan I fase I pemantauan dilakukan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-9 dibuang pada fase I sehingga jumlah  $n = 41$ . Berdasarkan persamaan (6) didapatkan nilai  $T^2$  untuk tiap pengamatan dan berdasarkan persamaan (7) dengan banyaknya variabel =  $p = 4$  diperoleh nilai *Beta* sebesar 0,3416 maka batas kendali atas (*UCL*) dengan  $\alpha=0,05$  pada pengulangan I fase I adalah :

$$UCL = 13,3307$$

sedangkan batas kendali bawah (*LCL*) berdasarkan persamaan (8) pada pengulangan I fase I yaitu :

$$LCL = 0$$

Melalui perhitungan ulang menggunakan data historis 8 setelah pengamatan ke-9 dibuang pada fase I sehingga jumlah  $n = 41$  diperoleh nilai *mean* sampel dan matriks variansi kovariansi sebagai berikut :

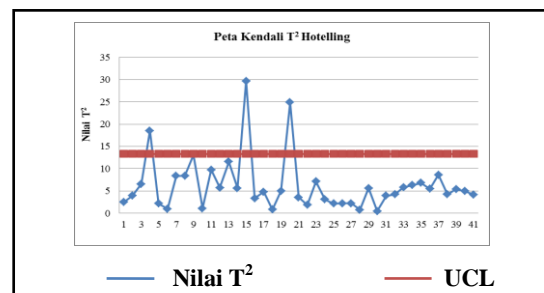
*Mean* sampel

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 82,91 \\ 42,04 \\ 7,58 \\ 0,19 \end{pmatrix}$$

Matriks Variansi Kovariansi

$$S = \begin{pmatrix} 831,16 & -18,31 & 0,15 & -2,37 \\ -18,31 & 42,51 & -1,25 & 0,07 \\ 0,15 & -1,25 & 0,08 & 0,00 \\ -2,37 & 0,07 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai  $T^2$  berada diatas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai  $T^2$  pada pengulangan I fase I diperoleh dari persamaan (6) dengan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-9 dibuang pada fase I.



Gambar 4. Peta Kendali  $T^2$  Hotelling Pengulangan I Fase I

Pada Gambar 4 menunjukkan peta kendali  $T^2$  Hotelling pada fase I setelah dilakukan 1 kali pengulangan yaitu 1 data *outlier* telah dibuang. Dari gambar tersebut masih terdapat data *outlier* yang berada di luar batas pengendali, oleh karena itu perlu dilakukan pengulangan kembali pada fase I.

**Pengulangan II Fase I**

Pada pengulangan II fase I pemantauan dilakukan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-15 dibuang pada pengulangan I fase I sehingga jumlah  $n = 40$ . Berdasarkan persamaan (6) didapatkan nilai  $T^2$  untuk tiap pengamatan dan berdasarkan persamaan (7) dengan banyaknya variabel  $= p = 4$  diperoleh nilai *Beta* sebesar 0,3416 maka batas kendali atas (*UCL*) dengan  $\alpha=0,05$  pada pengulangan II fase I adalah :

$$UCL = 12,9893$$

Sedangkan batas kendali bawah (*LCL*) berdasarkan persamaan (8) pada pengulangan II fase I yaitu :

$$LCL = 0$$

Melalui perhitungan ulang menggunakan data historis setelah pengamatan ke-15 dibuang pada pengulangan I fase I sehingga jumlah  $n = 40$  diperoleh nilai *mean* sampel dan matriks variansi kovariansi sebagai berikut :

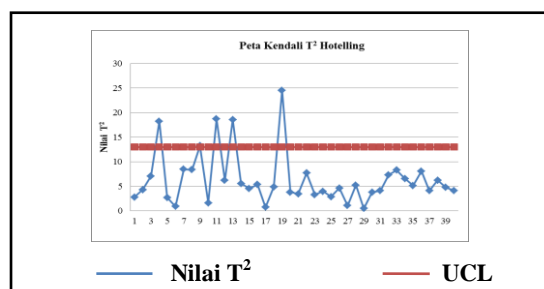
*Mean* sampel

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 81,51 \\ 42,67 \\ 7,57 \\ -0,19 \end{pmatrix}$$

Matriks Variansi Kovariansi

$$S = \begin{pmatrix} 769,79 & 18,58 & -0,60 & -2,23 \\ 18,58 & 26,72 & -0,94 & -0,02 \\ -0,60 & -0,94 & 0,07 & 0,00 \\ -2,23 & -0,02 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai  $T^2$  berada di atas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai  $T^2$  pada pengulangan II fase I diperoleh dari persamaan (2.13) dengan menggunakan data historis (Tabel 4.7) setelah pengamatan ke-15 dibuang pada pengulangan I fase I.



Gambar 5. Peta Kendali  $T^2$  Hotelling Pengulangan II Fase I

Pada Gambar 5 menunjukkan peta kendali  $T^2$  Hotelling pada fase I setelah dilakukan 2 kali perulangan yaitu 2 data *outlier* telah dibuang. Dari gambar tersebut masih terdapat data *outlier* yang berada di luar batas pengendali, oleh karena

itu perlu dilakukan perulangan kembali pada fase I.

**Pengulangan III Fase I**

Pada pengulangan III fase I pemantauan dilakukan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-19 dibuang pada pengulangan II fase I sehingga jumlah  $n = 39$ . Berdasarkan persamaan (6) didapatkan nilai  $T^2$  untuk tiap pengamatan dan berdasarkan persamaan (7) dengan banyaknya variabel  $= p = 4$  diperoleh nilai *Beta* sebesar 0,3416 maka batas kendali atas (*UCL*) dengan  $\alpha=0,05$  pada pengulangan III fase I adalah :

$$UCL = 12,6480$$

Sedangkan batas kendali bawah (*LCL*) berdasarkan persamaan (8) pada pengulangan III fase I yaitu :

$$LCL = 0$$

Melalui perhitungan ulang menggunakan data historis setelah pengamatan ke-19 dibuang pada pengulangan II fase I sehingga jumlah  $n = 39$  diperoleh nilai *mean* sampel dan matriks variansi kovariansi sebagai berikut :

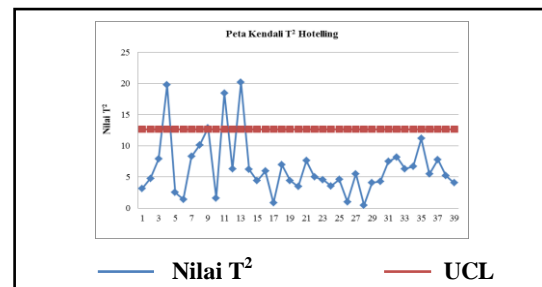
*Mean* sampel

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 82,92 \\ 42,75 \\ 7,58 \\ -0,19 \end{pmatrix}$$

Matriks Variansi Kovariansi

$$S = \begin{pmatrix} 708,07 & 14,52 & -1,17 & -2,08 \\ 14,52 & 27,17 & -0,99 & 0,07 \\ -1,17 & -0,99 & 0,07 & 0,00 \\ -2,08 & -0,01 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai  $T^2$  berada diatas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai  $T^2$  pada pengulangan III fase I diperoleh dari persamaan (6) dengan menggunakan data historis) setelah pengamatan ke-19 dibuang pada pengulangan II fase I.



Gambar 6. Peta Kendali  $T^2$  Hotelling Pengulangan III Fase I

Pada Gambar 6 menunjukkan peta kendali  $T^2$  Hotelling pada fase I setelah dilakukan 3 kali

perulangan yaitu 3 data *outlier* telah dibuang. Dari gambar tersebut masih terdapat data *outlier* yang berada di luar batas pengendali, oleh karena itu perlu dilakukan perulangan kembali pada fase I.

**Pengulangan IV Fase I**

Pada pengulangan IV fase I pemantauan dilakukan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-13 dibuang pada pengulangan III fase I sehingga jumlah  $n = 38$ . Berdasarkan persamaan (6) didapatkan nilai  $T^2$  untuk tiap pengamatan dan berdasarkan persamaan (7) dengan banyaknya variabel  $= p = 4$  diperoleh nilai *Beta* sebesar 0,3416 maka batas kendali atas (*UCL*) dengan  $\alpha=0,05$  pada pengulangan IV fase I adalah :

$$UCL=12,3070$$

Sedangkan batas kendali bawah (*LCL*) berdasarkan persamaan (8) pada fase I yaitu :

$$LCL=0$$

Melalui perhitungan ulang menggunakan data historis setelah pengamatan ke-13 dibuang pada pengulangan III fase I sehingga jumlah  $n = 38$  diperoleh nilai *mean* sampel dan matriks variansi kovariansi sebagai berikut :

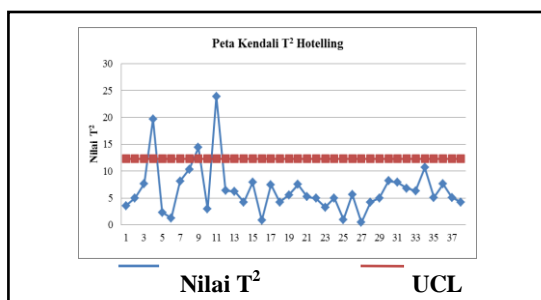
*Mean* sampel

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 83,28 \\ 42,42 \\ 7,58 \\ -0,19 \end{pmatrix}$$

Matriks Variansi Kovariansi

$$S = \begin{pmatrix} 721,99 & 19,67 & -1,21 & -2,12 \\ 19,67 & 23,58 & -1,02 & -0,03 \\ -1,21 & -1,02 & 0,07 & 0,00 \\ -2,12 & -0,03 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai  $T^2$  berada diatas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai  $T^2$  pada pengulangan IV fase I diperoleh dari persamaan (6) dengan menggunakan data historis) setelah pengamatan ke-13 dibuang pada pengulangan III fase I.



Gambar 7. Peta Kendali  $T^2$  Hotelling Pengulangan IV Fase I

Pada Gambar 7 menunjukkan peta kendali  $T^2$  Hotelling pada Fase I setelah dilakukan 4 kali pengulangan yaitu 4 data *outlier* telah dibuang. Dari gambar tersebut masih terdapat data *outlier* yang berada di luar batas pengendali, oleh karena itu perlu dilakukan perulangan kembali pada Fase I.

**Pengulangan V Fase I**

Pada pengulangan V fase I pemantauan dilakukan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-11 dibuang pada pengulangan IV fase I sehingga jumlah  $n = 37$ . Berdasarkan persamaan (6) didapatkan nilai  $T^2$  untuk tiap pengamatan dan berdasarkan persamaan (7) dengan banyaknya variabel  $= p = 4$  diperoleh nilai *Beta* sebesar 0,3416 maka batas kendali atas (*UCL*) dengan  $\alpha=0,05$  pada pengulangan V fase I adalah :

$$UCL=11,9652$$

Sedangkan batas kendali bawah (*LCL*) berdasarkan persamaan (8) pada fase I yaitu :

$$LCL=0$$

Melalui perhitungan ulang menggunakan data historis setelah pengamatan ke-11 dibuang pada pengulangan IV fase I sehingga jumlah  $n = 37$  diperoleh nilai *mean* sampel dan matriks variansi kovariansi sebagai berikut :

*Mean* sampel

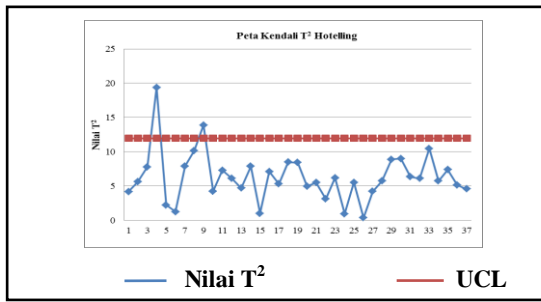
$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 83,46 \\ 42,00 \\ 7,59 \\ -0,19 \end{pmatrix}$$

Matriks Variansi Kovariansi

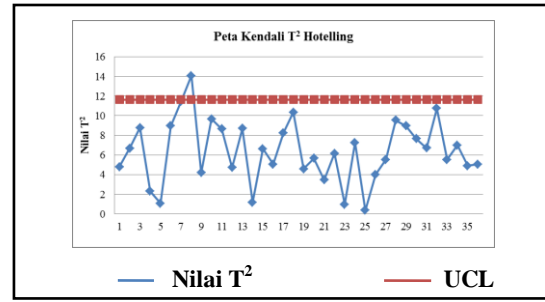
$$S = \begin{pmatrix} 740,84 & 23,10 & -1,33 & -2,17 \\ 23,10 & 17,31 & -0,83 & -0,03 \\ -1,33 & -0,83 & 0,07 & 0,00 \\ -2,17 & -0,03 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai  $T^2$  berada diatas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai  $T^2$  pada pengulangan V fase I diperoleh dari persamaan (6) dengan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-11 dibuang pada pengulangan IV fase I.

Pada Gambar 8 menunjukkan peta kendali  $T^2$  Hotelling pada Fase I setelah dilakukan 5 kali pengulangan yaitu 5 data *outlier* telah dibuang. Dari gambar tersebut masih terdapat data *outlier* yang berada di luar batas pengendali, oleh karena itu perlu dilakukan perulangan kembali pada Fase I.



Gambar 8. Peta Kendali T<sup>2</sup> Hotelling Pengulangan V Fase I



Gambar 9. Peta Kendali T<sup>2</sup> Hotelling Pengulangan VI Fase I

**Pengulangan VI Fase I**

Pada pengulangan VI fase I pemantauan dilakukan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-4 dibuang pada pengulangan V fase I sehingga jumlah  $n = 36$ . Berdasarkan persamaan (6) didapatkan nilai  $T^2$  untuk tiap pengamatan dan berdasarkan persamaan (7) dengan banyaknya variabel  $= p = 4$  diperoleh nilai *Beta* sebesar 0,3416 maka batas kendali atas (*UCL*) dengan  $\alpha=0,05$  pada pengulangan VI fase I adalah :

$$UCL = 11,6239$$

Sedangkan batas kendali bawah (*LCL*) berdasarkan persamaan (8) pada fase I yaitu :

$$LCL = 0$$

Melalui perhitungan ulang menggunakan data historis setelah pengamatan ke-4 dibuang pada pengulangan V fase I sehingga jumlah  $n = 36$  diperoleh nilai *mean* sampel dan matriks variansi kovariansi dan matriks korelasi sebagai berikut :

*Mean* sampel

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 81,61 \\ 41,89 \\ 7,60 \\ -0,19 \end{pmatrix}$$

Matriks Variansi Kovariansi

$$S = \begin{pmatrix} 631,99 & 15,95 & -0,89 & -1,97 \\ 15,95 & 17,34 & -0,83 & -0,02 \\ -0,89 & -0,83 & 0,07 & 0,00 \\ -1,97 & -0,02 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai  $T^2$  berada diatas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai  $T^2$  pada pengulangan VI fase I diperoleh dari persamaan (2.13) dengan menggunakan data historis (Tabel 4.16) setelah pengamatan ke-4 dibuang pada pengulangan V fase I.

Pada Gambar 9 menunjukkan peta kendali T<sup>2</sup> Hotelling pada Fase I setelah dilakukan 6 kali pengulangan yaitu 6 data *outlier* telah dibuang. Dari gambar tersebut masih terdapat data *outlier* yang berada di luar batas pengendali, oleh karena itu perlu dilakukan pengulangan kembali pada Fase I.

**Pengulangan VII Fase I**

Pada pengulangan VII fase I pemantauan dilakukan menggunakan data historis setelah pengamatan ke-8 dibuang pada pengulangan VI fase I sehingga jumlah  $n = 35$ . Berdasarkan persamaan (6) didapatkan nilai  $T^2$  untuk tiap pengamatan dan berdasarkan persamaan (7) dengan banyaknya variabel  $= p = 4$  diperoleh nilai *Beta* sebesar 0,3416 maka batas kendali atas (*UCL*) dengan  $\alpha=0,05$  pada pengulangan VII fase I adalah :

$$UCL = 11,2826$$

Sedangkan batas kendali bawah (*LCL*) berdasarkan persamaan (8) pada fase I yaitu :

$$LCL = 0$$

Melalui perhitungan ulang menggunakan data historis setelah pengamatan ke-8 dibuang pada pengulangan VI fase I sehingga jumlah  $n = 35$  diperoleh nilai *mean* sampel dan matriks variansi kovariansi sebagai berikut :

*Mean* sampel

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 82,37 \\ 41,92 \\ 7,59 \\ -0,19 \end{pmatrix}$$

Matriks Variansi Kovariansi

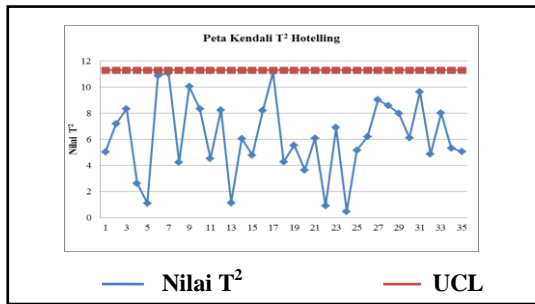
$$S = \begin{pmatrix} 629,48 & 15,70 & -0,60 & -1,91 \\ 15,70 & 17,82 & -0,84 & -0,02 \\ -0,60 & -0,84 & 0,06 & 0,00 \\ -1,91 & -0,02 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai  $T^2$  berada diatas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai  $T^2$  pada pengulangan VII fase I diperoleh dari persamaan (2.13) dengan menggunakan data historis (Tabel 4.18) setelah pengamatan ke-8 dibuang pada pengulangan VI fase I.

Pada Gambar 10 menunjukkan peta kendali T<sup>2</sup> fase I setelah data outlier yang ke-8 dibuang. Dari gambar tersebut ternyata sudah tidak terdapat pengamatan yang berada di atas batas kendali (*Upper Control Limit/UCL*), hal ini berarti proses sudah dalam keadaan terkendali. Karena tidak ada *outlier* yang muncul pada



gambar 10 maka nilai  $\bar{x}$  dan  $S$  pada pengulangan VII fase I akan digunakan pada fase II.



Gambar 10. Peta Kendali T<sup>2</sup> Hotelling Pengulangan VII Fase I

**Fase II**

Dengan menggunakan persamaan (9) dan memakai data historis pada pengulangan VII fase I dengan derajat bebas I =  $p = 4$ , derajat bebas II =  $n-p = 31$  serta  $\alpha = 0,05$  maka batas kendali atas (*Upper Control Limit/UCL*) pada fase II adalah

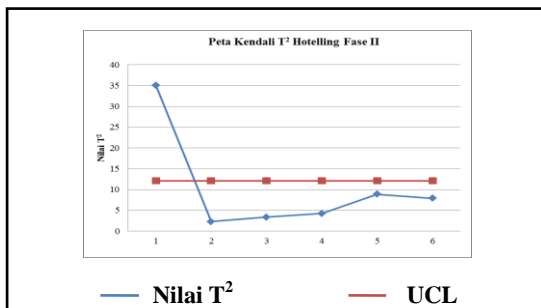
$$UCL = \frac{p(n-1)(n+1)}{n(n-p)} F_{(p,n-p;\alpha)}$$

$$UCL = 12,0873$$

Sedangkan batas kendali bawah (*Lower Control Limit/LCL*) pada fase II berdasarkan persamaan (10) adalah :

$$LCL = 0$$

Mean sampel dan mariks variansi kovariansi menggunakan hasil perhitungan pada pengulangan VII fase I. Nilai suatu pengamatan dikatakan sebagai *outlier* jika nilai T<sup>2</sup> berada diatas batas pengendali atas (*Upper Control Limit/UCL*). Nilai T<sup>2</sup> pada fase II diperoleh dari persamaan (6) dengan menggunakan data baru.



Gambar 11. Peta Kendali T<sup>2</sup> Hotelling Fase II Dengan Data Pengamatan Baru

Karena nilai T<sup>2</sup> untuk pengamatan ke-1 data baru ternyata lebih besar dari batas kendali atas (*Upper Control Limit/UCL*) = 12,0873 maka menunjukkan bahwa proses dalam keadaan tidak terkendali. Oleh karena itu selanjutnya perlu diidentifikasi variabel mana yang menyebabkan proses dalam keadaan tidak terkendali dan metode yang digunakan adalah dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT).

**Dekomposisi Mason, Young dan Tracy (MYT)**

**Suku Tidak Bersyarat**

Dengan menggunakan persamaan (13) dan jumlah pengamatan (n) pada fase I yaitu sebanyak 42 pengamatan dengan derajat bebas I = 1, derajat bebas II =  $n = 42$  serta  $\alpha = 0,05$  maka batas kendali atas (*Upper Control Limit/UCL*) dekomposisi MYT suku tidak bersyarat adalah

$$UCL = \frac{(n+1)}{n} F_{(\alpha;1,n-1)}$$

$$UCL = 4,1756$$

Sedangkan berdasarkan persamaan (14) batas kendali bawah (*Lower Control Limit/LCL*) dekomposisi MYT suku tidak bersyarat adalah

$$LCL = 0$$

Perhitungan nilai T<sup>2</sup> dekomposisi MYT suku tidak bersyarat menggunakan persamaan (12) dan nilai variabel pengamatan ke-1 pada data baru dengan nilai  $\bar{x}$  dan  $S$  yang digunakan diperoleh pada fase II peta kendali T<sup>2</sup> Hotelling diuraikan sebagai berikut :

Untuk variabel Kekeruhan Air Produksi ( $X_1$ )

$$T_j^2 = \frac{(x_j - \bar{X}_j)^2}{s_j^2}$$

$$T_1^2 = 2,2495$$

dengan cara yang sama diperoleh nilai T<sup>2</sup>, T<sub>3</sub><sup>2</sup> dan T<sub>4</sub><sup>2</sup>, Nilai T<sup>2</sup> dekomposisi MYT suku tidak bersyarat disajikan pada Tabel 3 sebagai berikut :

Tabel 3. Nilai T<sup>2</sup> Dekomposisi MYT Suku Tidak Bersyarat

Varia- bel	T <sub>i</sub> <sup>2</sup>	Nilai Kritis/UCL	Kesimpulan
X <sub>1</sub>	2,25	4,1757	Bukan penyebab proses tidak terkendali
X <sub>2</sub>	0,24	4,1757	Bukan penyebab proses tidak terkendali
X <sub>3</sub>	6,20	4,1757	Penyebab proses tidak terkendali
X <sub>4</sub>	2,78	4,1757	Bukan penyebab proses tidak terkendali

Berdasarkan hasil analisis pada Tabel 3 ternyata variabel pH Air memiliki T<sup>2</sup> lebih besar dari (*Upper Control Limit/UCL*) yang berarti pH Air merupakan penyebab terjadinya *outlier* pada pengamatan ke-1 dari data baru.

**Suku Bersyarat**

Dengan menggunakan persamaan (16) dan jumlah pengamatan (n) pada fase I yaitu sebanyak 42 pengamatan dengan derajat bebas I = 1, derajat bebas II =  $n = 42$  serta  $\alpha = 0,05$  maka batas kendali atas (*Upper Control Limit/UCL*) dekomposisi MYT suku bersyarat adalah

$$UCL = \left( \frac{(n+1)(n-1)}{n(n-k-1)} \right) F_{(\alpha,1,n-k-1)}$$

$$UCL = 1.6984$$

Sedangkan berdasarkan persamaan (17) batas kendali bawah (*Lower Control Limit/LCL*) dekomposisi MYT suku bersyarat adalah

$$LCL = 0$$

Perhitungan nilai  $T_{j,k}^2$  dekomposisi MYT suku tidak bersyarat menggunakan persamaan (15) dan nilai variabel pengamatan ke-1 pada data baru dengan nilai  $\bar{X}$  dan  $S$  yang digunakan diperoleh pada fase II peta kendali  $T^2$  Hotelling diuraikan sebagai berikut :

Untuk variabel Kekерuhan Air Baku ( $X_1$ ) dan Dosis Koagulan ( $X_2$ )

$$T_{j,k}^2 = T_{j,1,2,\dots,j-1}^2 = \frac{(x_1 - \bar{X}_{j,1,2,\dots,j-1})^2}{S_{j,1,2,\dots,j-1}^2}$$

$$T_{1,2}^2 = \frac{(x_1 - \bar{X}_{1,2})^2}{S_{1,2}^2}$$

Tabel 4. Nilai  $T^2$  Dekomposisi MYT Suku Bersyarat

Variabel	$T_{ij}^2$	Nilai Kritik/UCL	Kesimpulan
$X_1$ dan $X_2$	2,2563	1,6948	Penyebab proses tidak terkendali
$X_1$ dan $X_3$	2,2493	1,6948	Penyebab proses tidak terkendali
$X_1$ dan $X_4$	2,2694	1,6948	Penyebab proses tidak terkendali
$X_2$ dan $X_1$	0,0246	1,6948	Bukan penyebab proses tidak terkendali
$X_2$ dan $X_3$	0,1076	1,6948	Bukan penyebab proses tidak terkendali
$X_2$ dan $X_4$	0,2428	1,6948	Bukan penyebab proses tidak terkendali
$X_4$ dan $X_1$	0,2730	1,6948	Bukan penyebab proses tidak terkendali
$X_4$ dan $X_2$	0,5204	1,6948	Bukan penyebab proses tidak terkendali
$X_4$ dan $X_3$	0,3600	1,6948	Bukan penyebab proses tidak terkendali

Berdasarkan hasil analisis pada Tabel 4 dapat disimpulkan bahwa variabel Kekерuhan Air Baku ( $X_1$ ) dan Dosis Koagulan ( $X_2$ ), Kekерuhan Air Baku ( $X_1$ ) dan pH Air ( $X_3$ ) serta Kekерuhan Air Baku ( $X_1$ ) dan Kekерuhan Air Produksi ( $X_4$ ) secara bersama-sama berpotensi menyebabkan proses dalam keadaan tidak terkendali.

**Kesimpulan**

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh, maka penulis dapat menarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Variabel pH Air ( $X_3$ ) menyebabkan air hasil produksi Perusahaan Daerah Air Minum

(PDAM) Kota Samarinda dalam keadaan tidak terkendali.

2. Variabel Kekерuhan Air Baku ( $X_1$ ) dan Dosis Koagulan ( $X_2$ ), Kekерuhan Air Baku ( $X_1$ ) dan pH Air ( $X_3$ ) serta Kekерuhan Air Baku ( $X_1$ ) dan Kekерuhan Air Produksi ( $X_4$ ) secara bersama-sama berpotensi menyebabkan air hasil produksi Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Kota Samarinda dalam keadaan tidak terkendali.

**Daftar Pustaka**

Gonzalez de la Parra, Mario & Pilar Rodriguez Loaiza. 2003. *Application of the multivariate  $T^2$  control chart and Mason-Tracy-Young Decomposition procedure to the Study of the consistency of impurity profiles of drug substances*. Marcel Dekker. New York.

Herrhyanto, Nar & Gantini, Tuti. 2009. *Pengantar Statistik Matematis*. Yrama Widya. Bandung.

Howell, D. C. (2007). *Statistical Methods for Psychology (6<sup>th</sup> ed.)*. Belmont, CA:Thomson Wadsworth.

Johnson A.Richard & Wichern W.Dean. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall. New Jersey.

Mason, R.L., Chou, Y.M., & J.C .Young. 2001. *Applying Hotelling's  $T^2$  statistics to batch process*. Journal of quality technology vol 33.

Yuneidi, Belinda., Rahmi, Izzati. & Yozza, Hazmira. 2012. *Pembuatan Bagan Kendali Multivariat  $T^2$ -Hotelling Untuk Proses Perkuliahan*. Jurnal Matematika Universitas Andalas Padang Vol.1.